数理解析研究所講究録
375 巻 1980 年 6-12

H. Q. F. '79

神保 道夫
三輪 哲二
毛織 泰子
佐藤 幹夫

§1 1次元不透過ボーズ気体の密度行列

非線型シュレーディンガー方程式の量子化を考える。

$$(1.1)\qquad i\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + c\,\phi^*\phi^2$$

長さ L の箱に入れて考える事とし，粒子数 N の最低エネルギー状態を与える波動函数は $c=\infty$ において

$$(1.2)\qquad \Psi_{N,L}(x_1,\cdots,x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!L^N}}\prod_{j<k}\left|e^{2\pi i x_j/L} - e^{2\pi i x_k/L}\right|$$

で与えられる。(M. Girardeau, J. Math. Phys. $\underline{1}$ (1960) 516) 対応する状態ベクトルを $|\Psi_{N,L}\rangle$ と書こう。

n 粒子密度行列の熱力学極限

$$(1.3)\qquad \rho_n(a_1',\cdots,a_n';a_1'',\cdots,a_n'')$$

$$= \lim_{\substack{N,L\to\infty \\ \rho_0=N/L\,:\,\text{fixed}}} \langle\Psi_{N,L}|\phi^*(a_1')\cdots\phi^*(a_n')\phi(a_1'')\cdots\phi(a_n'')|\Psi_{N,L}\rangle$$

$$= \lim_{\substack{N, L \to \infty \\ \rho_0 = N/L : \text{fixed}}} \frac{N!}{(N-n)!} \int_0^L \cdots \int_0^L dx_{n+1} \cdots dx_N$$

$$\times \Psi^*_{N,L}(a'_1, \cdots, a'_n, x_{n+1}, \cdots, x_N) \Psi_{N,L}(a''_1, \cdots, a''_n, x_{n+1}, \cdots, x_N)$$

は以下のようにパンルベ型の非線型全微分方程式系の解によって表わされる。

$n = 1$

$\rho_1(a'_1; a''_1) = \rho(|a'_1 - a''_1|)$ とおくと

$$\rho(a) = \rho_0 \exp\left(\int_0^a dt \frac{\sigma(t)}{t} \right)$$

$$(1.4) \quad (t\sigma'')^2 = -4(t\sigma' - 1 - \sigma)(t\sigma' + (\sigma')^2 - \sigma)$$

n：一般

$$\rho_n(a'_1, \cdots, a'_n; a''_1, \cdots, a''_n)$$

$$= \text{const.} \det\left(R_I(a'_j, a''_k)\right)_{j,k=1,\cdots,n} \exp\left(\int \omega\right)$$

$a_1 < \cdots < a_{2n}$ を $a'_1, \cdots, a'_n, a''_1, \cdots, a''_n$ の並べかえとし

$$(1.5) \quad R_I(a_j, a_k) = \begin{cases} \dfrac{1}{2i(a_j - a_k)}(r_{+j} r_{-k} - r_{-j} r_{+k}) & (j \neq k) \\ \dfrac{1}{4} \displaystyle\sum_{j' (\neq j)} \frac{(r_{+j} r_{-j'} - r_{+j'} r_{-j})^2}{a_{j'} - a_j} + i r_{+j} r_{-j} & (j = k) \end{cases}$$

$$(1.6)\quad \omega = -\frac{1}{4}\sum_{j<j'}(r_{+j}r_{-j'}-r_{+j'}r_{-j})^2\,\frac{da_j - da_{j'}}{a_j - a_{j'}} + i\sum_{j} r_{+j}r_{-j}\,da_j$$

$$(1.7)\quad \frac{\partial r_{\pm j}}{\partial a_k} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(-r_{\pm k}r_{-k}r_{+j} + r_{\pm k}r_{+k}r_{-j})\dfrac{1}{a_j - a_k} & (k \neq j) \\ \pm i\, r_{\pm j} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j'(\neq j)}(-r_{\pm j'}r_{-j'}r_{+j} + r_{\pm j'}r_{+j'}r_{-j})\dfrac{1}{a_j - a_{j'}} & (j = k) \end{cases}$$

§2 常微分方程式の変形理論

不確定特異点を持つリーマンの問題の1例として次の性質を持つ　2×2 行列 $Y(x)$ を構成する。

$a_1 < \cdots < a_{2n}$ とし

i) $Y(x)$ は $x \neq a_1, \cdots, a_{2n}, \infty$ で可逆正則

ii) $x = \infty$ での振舞

$$Y(x) = \left(1 + O\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) e^{\begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} x}$$

iii) $x = a_1, \cdots, a_{2n}$ での振舞

$$Y(x) = \hat{Y}(x)\left(\frac{(x-a_1)\cdots(x-a_{2n-1})}{(x-a_2)\cdots(x-a_{2n})}\right)^{\begin{pmatrix}0 & \frac{i\lambda}{2} \\ & 0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$\hat{Y}(x)$ は $x \neq \infty$ で可逆正則

上記の性質を満たす $Y(x)$ は次の級数表示で与えられる。

$$Y(x) = \begin{pmatrix} R_+^+(x;\lambda) & R_+^-(x;\lambda) \\ R_-^+(x;\lambda) & R_-^-(x;\lambda) \end{pmatrix}$$

(2.1)

$$R_{\pm}^{\pm'}(x;\lambda) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^\ell \int_I \cdots \int_I dx_1 \cdots dx_\ell$$

$$\times \frac{\pm' e^{\pm' i(x_0-x_1)}}{2i} \frac{\sin(x_1-x_2)}{x_1-x_2} \cdots \frac{\sin(x_{\ell-1}-x_\ell)}{x_{\ell-1}-x_\ell} e^{\pm i x_\ell}$$

$(x_0 = x)$

$I = [a_1, a_2] \cup \cdots \cup [a_{2n-1}, a_{2n}]$ (n個の区間の和)

i) ～ iii) の帰結として $Y(x)$ は次の形の線型方程式を満たす。

(2.2) $\quad dY = \left(\sum_j A_j \, d\log(x-a_j) + \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} dx \right) Y$

$$A_j = \begin{pmatrix} r_{+j} \\ r_{-j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r_{-j} & r_{+j} \end{pmatrix}$$

$$r_{\pm j} = \sqrt{(-)^j i\lambda}\,\left(R_{\pm}^{+}(a_j;\lambda) + R_{\pm}^{-}(a_j;\lambda) \right)$$

線型方程式系 (2.2) の積分可能条件は次の形の非自律的なハミルトン系になる。ω は§1で与えられたものとし

$$(2.3) \qquad d r_{\pm j} = \{ r_{\pm j} , \omega \}$$

但し ポアソンかっこは

$$\{r_{+j}, r_{+j'}\} = \{r_{-j}, r_{-j'}\} = 0 , \quad \{r_{+j}, r_{-j'}\} = \delta_{jj'}$$

特に $n=1$ の時、このハミルトン方程式はパンルベのⅤ型の方程式の特別な場合になる。よって (2.1) $(x=a_1, a_2)$ はパンルベⅤ型の特殊解を与える。

§3 フレドホルム理論

Lenard (J. Math. Phys. 7 (1966) 1268) によれば $\rho_n(a_1', \cdots, a_n' ; a_1'', \cdots, a_n'')$ は核 $-\frac{2}{\pi}\frac{\sin(x-x')}{x-x'}$ を区間 I 上で考えた第2種フレドホルム積分方程式の, n 次フレドホルム小行列

式に等しい。 定義を思い出すと

$$(3.1)\quad \Delta_I(\lambda) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^\ell}{\ell !} \int_I \cdots \int_I dx_1 \cdots dx_\ell$$

$$\times \det \left(\frac{\sin(x_j - x_k)}{x_j - x_k} \right)_{j,k=1,\cdots,\ell}$$

が フレドホルム行列式

$$(3.2)\quad R_I(x, x'; \lambda) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^\ell}{\ell !} \int_I \cdots \int_I dx_1 \cdots dx_\ell$$

$$\times \frac{\sin(x_0 - x_1)}{x_0 - x_1} \cdots \frac{\sin(x_\ell - x_{\ell+1})}{x_\ell - x_{\ell+1}} . \quad (x_0 = x, x_{\ell+1} = x')$$

が レゾルベント

$$(3.3)\quad \Delta_I \begin{pmatrix} x_1 \cdots x_m \\ x_1' \cdots x_m' \end{pmatrix}; \lambda) = (-\lambda)^m \Delta_I(\lambda) \det\left(R_I(x_j, x_k'; \lambda)\right)_{j,k=1,\cdots,m}$$

が m 次 小行列式。

Lenard によれば，必要なのは，$m = n$，
$x_1 = a_1'$，$\cdots$，$x_n = a_n'$，$x_1' = a_1''$，$\cdots$，$x_n' = a_n''$
の場合であるが

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \log \Delta_I(\lambda) = (-)^{j+1} \lambda R_I(a_j, a_j; \lambda)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial a_j \partial a_k} \log \Delta_I(\lambda) = (-)^{j+k+1} \lambda^2 R_I(a_j, a_k; \lambda)^2$$

であるから $d \log \Delta_I(\lambda)$ がわかればよい。

問題を線型化するために，レゾルベントを修正した次の $R^{\pm}(x, x'; \lambda)$ および その $x' \longrightarrow \infty$ の極限 $R^{\pm\prime}_{\pm}(x; \lambda)$ を考える。

$$(3.4) \quad R^{\pm}(x, x'; \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l \int_I \cdots \int_I dx_1 \cdots dx_l$$

$$\times \frac{\pm e^{\pm i(x_0 - x_1)}}{2i(x_0 - x_1)} \frac{\sin(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} \cdots \frac{\sin(x_l - x_{l+1})}{x_l - x_{l+1}}$$

$$(x_0 = x,\ x_{l+1} = x')$$

$$(3.5) \quad R^{\pm\prime}_{\pm}(x; \lambda) = \mp \lim_{\substack{|x'| \to \infty \\ \mathrm{Im}\, x' \gtrless 0}} 2ix' e^{\pm ix'} R^{\pm\prime}(x, x'; \lambda)$$

ここで §2のように $Y(x)$ を考える事により常微分方程式の変形理論と結びつく。最後に

$$(3.6) \quad d \log \Delta_I(x) = \mathrm{trace} \sum_{j=1}^{2n} \hat{Y}(a_j)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \hat{Y}(x) \Big|_{x=a_j} \begin{pmatrix} 0 & (-)^{j+1} \frac{i\lambda}{2} \\ & 0 \end{pmatrix} da_j$$

となる事より §1 の結果が従う。